

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Реалізація алгоритмів стиснення з втратами

Дискретне косинусне перетворення та дискретне вейвлет-перетворення Хаара

Левківський Євгеній Сергійович

ІПС-41

1. Мета роботи

Реалізувати прямі та обернені DCT і DWT без готових функцій перетворення; дослідити вплив кількості збережених коефіцієнтів на якість відновлення зображень; порівняти результати візуально та за PSNR.

2. Програмна реалізація

Розроблено браузерний застосунок на HTML, CSS та JavaScript. Перетворення написано у `js/compression.js` з використанням `Float64Array`. Модулі `js/samples.js` і `js/app.js` відповідають за відтворення зразки та інтерфейс. Залежностей для роботи програми немає; готові `dct()`, `idct()`, `dwt()`, `idwt()` та бібліотеки перетворень не використовуються. При запуску через HTTP обчислення виконуються у Web Worker. Локальний `index.html` працює також без сервера.

Інтерфейс показує Original | DCT | DWT, PSNR, кількість вибраних і значущих коефіцієнтів. Доступні завантаження власного зображення, вибір частки від 1% до 100%, глибини DWT від 1 до 5 рівнів, максимального розміру 256, 512 або 1024 px, збільшення зображень, експорт порівняння PNG та результатів CSV.

2.1. Підготовка зображення

Кольорові зображення переводяться в 8-бітну яскравість $Y = \text{round}(0,299R + 0,587G + 0,114B)$. Прозорість попередньо накладається на біле тло. За потреби зображення зменшується зі збереженням пропорцій до обраної максимальної сторони. Для обох методів значення центруються: $B = Y - 128$.

Обидва розміри доповнюються копіями найближчих крайових пікселів до кратності $\max(8, 2^L)$, де L — глибина DWT. Це забезпечує однакову кількість коефіцієнтів. Після оберненого перетворення додається 128, область доповнення відкидається, значення округлюються та обмежуються діапазоном $[0; 255]$.

2.2. Матричне DCT

Зображення ділиться на незалежні блоки 8×8 . Власноруч будується ортонормована матриця C розміром 8×8 :

$$C[k,n] = \alpha(k) \cdot \cos(\pi(2n + 1)k / 16), \\ \alpha(0) = \sqrt{1/8}, \alpha(k) = \sqrt{2/8} \text{ для } k > 0.$$

Пряме перетворення блока: $A = C \cdot B \cdot C^T$. Після відкидання коефіцієнтів відновлення виконується за формулою $\hat{B} = C^T \cdot \hat{A} \cdot C$. Множення реалізовано двома послідовними матричними добутками за допомогою циклів. Ортонормованість C забезпечує оберненість та збереження енергії до похибки чисел з рухомою комою.

2.3. Двовимірне DWT Хаара

Для кожної пари (x, y) власноруч обчислюються ортонормовані середнє та різниця:

$$a = (x + y) / \sqrt{2}; d = (x - y) / \sqrt{2}.$$
$$x = (a + d) / \sqrt{2}; y = (a - d) / \sqrt{2}.$$

Прямий крок виконується спочатку за рядками, потім за стовпцями. Утворюються чотири піддіапазони: LL (наближення), LH, HL, HH (деталі; позначення орієнтації залежить від порядку осей). Наступний рівень обробляє лише LL. Обернення проходить рівні у зворотному порядку: спочатку стовпці, потім рядки. В експериментах $L = 3$.

3. Механізм стиснення й оцінювання

Застосовано глобальне збереження найбільших за модулем коефіцієнтів окремо для DCT і DWT. Для N позицій та частки p вибирається рівно $K = \text{round}(N \cdot p / 100)$ позицій; інші обнуляються. При рівних модулях використовується початковий індекс. Серед вибраних позицій можуть бути нульові, тому кількість значущих коефіцієнтів додатково рахується за умовою $|c| > 10^{-9}$. DC і LL не мають окремої привілеї при відборі.

$$\text{MSE} = \sum (I[x, y] - \hat{I}[x, y])^2 / (W \cdot H).$$
$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10}(255^2 / \text{MSE}).$$

PSNR обчислюється для відновлених 8-бітних пікселів після округлення, обмеження та обрізання до початкового розміру. За $\text{MSE} = 0$ результат $\text{PSNR} = \infty$. Більше значення PSNR відповідає меншій середньоквадратичній похибці, але не є вичерпною оцінкою сприйняття.

Реальне ентропійне кодування й бітовий потік не реалізовані. Відношення N/K характеризує лише скорочення кількості вибраних позицій; це не коефіцієнт стиснення закодованого файлу. Формат PNG використовується для експорту пікселів. Його розмір не використовується для оцінки DCT/DWT.

4. Умови та результати експериментів

Використано три власні синтетичні зображення 512×512 px: «Гірський пейзаж», «Текстури й частоти» та «Контури та градієнти». Зразки детерміновані, містять плавні переходи, гострі контури й різні просторові частоти. Вони генеруються js/samples.js без зовнішніх матеріалів. Для кожного зразка перевірено 5%, 15% і 35% збереження; DCT 8×8 та DWT Хаара з трьома рівнями; $N = 262\,144$. Доповнення для цих розмірів не потрібне.

Зображення	Частка	Вибрано K	DCT, дБ	DWT, дБ
Гірський пейзаж	5%	13107	39.99	40.67
Гірський пейзаж	15%	39322	49.71	50.21
Гірський пейзаж	35%	91750	61.72	59.17
Текстури й частоти	5%	13107	37.66	26.47
Текстури й частоти	15%	39322	54.13	34.02
Текстури й частоти	35%	91750	96.30	49.44
Контури та градієнти	5%	13107	41.98	37.84
Контури та градієнти	15%	39322	86.63	58.72
Контури та градієнти	35%	91750	∞	∞

Наведені значення отримані виконанням `npm run experiments`; повні значення MSE, PSNR та кількості значущих коефіцієнтів збережені у `results/experiments.json` і `results/experiments.csv`. При 5%, 15%, 35% відношення N/K становить приблизно 20,00; 6,67; 2,86 відповідно й описує тільки вибрані позиції.

4.1. Кількість значущих коефіцієнтів

Зображення	Частка	Значущих DCT	Значущих DWT
Гірський пейзаж	5%	13107	13107
Гірський пейзаж	15%	39322	39322
Гірський пейзаж	35%	91750	91750
Текстури й частоти	5%	13107	13107
Текстури й частоти	15%	39322	39322
Текстури й частоти	35%	91750	91750
Контури та градієнти	5%	13107	13107
Контури та градієнти	15%	39322	39322
Контури та градієнти	35%	44463	53193

5. Візуальне порівняння

Для зразка «Гірський пейзаж» нижче показано оригінал та два відновлення. Порядок у кожному рядку: Original | DCT | DWT. Усі зображення мають однаковий масштаб. Для оцінки дрібних артефактів у програмі доступне збільшення до початкового розміру.



Збережено 5%: DCT — 39.99 дБ; DWT — 40.67 дБ. Найбільші зміни серед трьох режимів помітні в дрібній текстурі схилів і хвилях.



Збережено 15%: DCT — 49.71 дБ; DWT — 50.21 дБ. Основні контури й тональні переходи збережено; зміни дрібних деталей слабші.



Збережено 35%: DCT — 61.72 дБ; DWT — 59.17 дБ. Візуальні відмінності від оригіналу при цьому масштабі малопомітні.

6. Аналіз та висновки

«Гірський пейзаж». PSNR у порядку DCT / DWT: 5%: 39.99 / 40.67 дБ; 15%: 49.71 / 50.21 дБ; 35%: 61.72 / 59.17 дБ. DCT має вищий PSNR у 1 із 3 режимів, DWT — у 2 із 3 режимів; однаковий результат — у 0 режимах.

«Текстури й частоти». PSNR у порядку DCT / DWT: 5%: 37.66 / 26.47 дБ; 15%: 54.13 / 34.02 дБ; 35%: 96.30 / 49.44 дБ. DCT має вищий PSNR у 3 із 3 режимів, DWT — у 0 із 3 режимів; однаковий результат — у 0 режимах.

«Контури та градієнти». PSNR у порядку DCT / DWT: 5%: 41.98 / 37.84 дБ; 15%: 86.63 / 58.72 дБ; 35%: ∞ / ∞ дБ. DCT має вищий PSNR у 2 із 3 режимів, DWT — у 0 із 3 режимів; однаковий результат — у 1 режимах.

Зі збільшенням кількості збережених коефіцієнтів якість зростає в наведених експериментах. DCT добре концентрує енергію плавних ділянок у низьких частотах блока; при сильному відкиданні характерні межі блоків і коливання біля контурів. Хаар компактно описує локальні перепади; втрата деталей може проявлятися ступінчастими переходами та ділянками сталої яскравості. Ці особливості слід оцінювати разом із PSNR у візуальному порівнянні.

Ефективність залежить від вмісту зображення, частки коефіцієнтів і глибини DWT. Отримані результати характеризують саме ці зразки та глобальний відбір за модулем; вони не доводять перевагу одного методу для всіх зображень. Реалізована схема є експериментальним стисненням із втратами у просторі коефіцієнтів, а не повним кодеком JPEG або JPEG 2000.

Дуже високі значення PSNR для структурованих синтетичних зразків пояснюються їх простими, добре стисливими структурами. Після округлення до 8 біт можливе точне відновлення пікселів навіть при частці меншій за 100%: на зразку «Контури та градієнти» це спостерігається при 35% для обох методів. Це не означає тотожності всіх коефіцієнтів і не гарантує таких самих результатів для природних фотографій.

7. Перевірка та відтворення

Команда `npm test` виконує 12 математичних перевірок: ортонормованість матриці DCT, DC сталої, збіг DCT з незалежною прямою формулою, прямокутне обернення, збереження енергії, відомий приклад Хаара 2×2 , обернення Хаара для 1–5 рівнів, точність відбору K, відомі значення PSNR, відновлення при 100% із доповненням, спадання енергії відкинутих коефіцієнтів і відхилення некоректних параметрів. Перевірки згруповано у 12 тестів.

Запуск: відкрити `index.html` або виконати `npm start` і перейти на `http://127.0.0.1:4173`.
Відтворення чисел та PNG: `npm run experiments`. Оновлення звіту: `npm run documents` (для PDF потрібен Playwright/Chromium). Збирання статичного сайту: `npm run build`.